Svyravimai ir bangos (2021 m. sausio 4 – 9 d.)

Svyravimai

Svyravimai (virpesiai) – tai reiškiniai, kurie vienokiu ar kitokiu būdu periodiškai atsikartoja. Tokių reiškinių gamtoje, technikoje ir buityje daugybė, jie labai įvairūs ir dažnai būna gana sudėtingi. Tai ir įvairiausių stygų virpesiai, laikrodžio svyruoklė, kamertonas, krūvių, įtampos ar srovės stiprio svyravimai radijo imtuvo kontūre, pagaliau nakties ir dienos periodinis kitimas ir kt.
Pagal fizikinę prigimtį svyravimai skirstomi į mechaninius, elektromagnetinius, elektromechaninius ir kt. Kaip minėta, svyravimų reiškiniai gamtoje ir technikoje labai palitę. Jie dažnai vaidina labai svarbų vaidmenį žmonių gyvenime, todėl juos būtina gerai pažinti. Štai vyksta tilto svyravimai, kurie tam tikromis sąlygomis gali tiek sustiprėti, kad svyravimų amplitudė pasiekusi kritinę vertę, suardo statinį. Pvz., toks atvejis įvyko su įžymiuoju Takomos tiltu JAV 1940 m. Tai 850 m siuras ir gana ilgas tiltas, besilaikantis ant įtemptų lynų. Jis sugriuvo praėjus 2 mėnesiams po jo atidarymo. Vėjas sukėlė stovinčiąsias tilto bangas, kurių amplitudė pasidarė tokia didelė,kad tiltas to neišlaikė mechaniškai. Jei tilto konstruktoriai būtų visapusiškai išnagrinėję galimus tokios mechaninės konstrukcijos svyravimus, nelaimės būtų išvengta.
Technikoje svyravimai daug kur vaidina itin svarbų vaidmenį. Štai praktiškai visa radiotechnika remiasi elektromagnetiniais svyravimais.
Pagal tai, kaip yra veikiam iš išorės svyruojanti sistema skiriami laisvieji (arba savieji) svyravimai, priverstiniai svyravimai, autosvyravimai ir parametriniai svyravimai.
Dabar detaliau nagrinėsime mechaninius svyravimus.

Maži svyravimai

Mechanikos uždaviniuose tai labai dažnai pasitaikantis atvejis. Tokius svyravimus gana paprasta modeliuoti teoriškai. Iš tikrųjų, svyravimuose svarbų vaidmenį vaidina potencinė energija, priklausanti nuo sistemos atsilenkimo nuo pusiausvyros padėties. Atsilenkimo parametras mechanikoje dažniausiai būna koordinatė ar kampas. Paprastai parenkama tokia koordinačių sistema, kad būtų vienas kintamasis, pvz., x. Tuomet potencinė energija

$$U = U(x) \tag{2-1}$$

Jei sistema turi stabilią pusiausvyros padėtį (svyravimams tai būtina), tai joje potencinė energija minimali. Jei tame taške pasirinktume koordinačių pradžią, tai potencinę energiją galime skleisti Teiloro-Makloreno eilute ir imti tik kelis pirmuosius narius būtent nedideliems x:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{U''(0)}{2}x^2 . \tag{2-2}$$

Taške $x=0$ yra U minimumas, todėl $U'(0)=0$. Be to, galime koordinačių pradžią parinkti taip, kad $U(0)=0$). Taigi,

$$U(x)=\frac{kx^2}{2} \quad . \tag{2-3}$$

Čia $k=U''(0)>0$ (priminsime, kad funkcijos minimumo taške jos antroji išvestinė teigiama).

(2-3) pavidalo potencinė energija net didesniems x tinka spyruoklei (galioja Huko dėsnis).

Žinome, kad jėga bendru atveju, kai potencinė energija $U=U(x,y,z)$, $\boldsymbol{F}=-gradU$. Čia $gradU=\boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}$. Mūsų atveju $U(x,y,z)=U(x)$. Taigi,

$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$, todėl pasinaudoję (2-3), gauname

$$F_x=-kx \tag{2-4}$$

Tai žinoma formulė spyruoklės atveju. Prisiminus, kad $F_x=ma=m\ddot{x}$, gauname

$$m\ddot{x}=-kx \quad . \tag{2-5}$$

Matematinė formuluotė

Grynai formaliai panagrinėkime diferencinę tokio pavidalo lygtį:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2x \quad . \tag{2-6}$$

Nesunku patikrinti, kad jos sprendinys gali būti

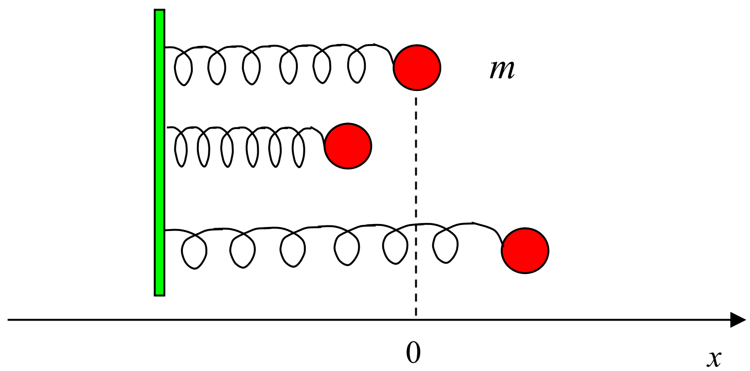
$$x=A\sin\omega_0 t \text{ arba } x=A\cos\omega_0 t \, . \tag{2-7}$$

Tuo būdu, jei uždavinį pavyksta suvesti į lygtį, analogišką (2-6), tai vyks svyravimai, kurių ciklinis dažnis ω_0. Tai sinusiniai svyravimai (t.y. vykstantys pagal sinuso ar kosinuso dėsnį), dar vadinami harmoniniais. Tokių svyravimų periodas T

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0} \quad . \tag{2-8}$$

Atskiri harmoninių svyravimų pavyzdžiai

1. Masės m kūnas ant spyruoklės, kurios stangrumo koeficientas k.



$$F = -kx$$

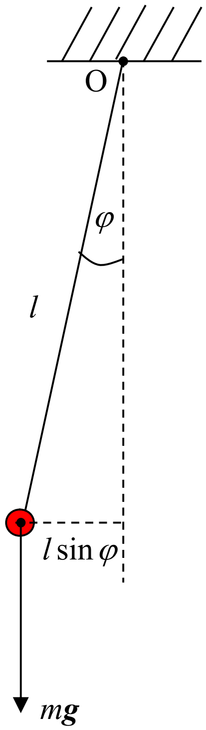
Bet $F = ma = m\ddot{x} \equiv m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Taigi lygtis

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$ arba

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Čia $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Periodui $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

2. Matematinė svyruoklė



Judėjimo lygtis $M = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$. Pritaikę duotam atvejui galime išreikšti jėgos mometą $\boldsymbol{M}$ ir judėjimo kiekio momentą $\boldsymbol{L}$ per konkrečius svyruoklės parametrus:

$M = -mgl\sin\varphi$

"-" ženklaas reiškia, kad vektorių $\boldsymbol{M}$ ir $\boldsymbol{\varphi}$ kryptys priešingos. Šiuo konkrečiu atveju $\boldsymbol{M}$ kryptis yra nukreipta į mus, o $\boldsymbol{\varphi}$ kryptis – į brėžinio plokštumą. Priminsime, kad $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]$.

Savo ruožtu $\boldsymbol{L} = I\vec{\omega}$ arba moduliams $L = I\omega$. Taigi, $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\beta$. Čia β - kampinis pagreitis, t.y. $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$.

Priminsime, kad $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. Tada $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$.

Beje, slenkamojo judėjimo atveju $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

Taigi, $M = I\ddot{\varphi}$ (vėlgi, slenkamojo judėjimo atveju $F = m\ddot{x}$).

Ašies, einančios per O ir stamenos brėžinio plokštumai, atžvilgiu sistemos (*m* masės rutuliuko ant ilgio *l* siūlo) inercijos momentas $I = ml^2$, todėl

$$-mgl\sin\varphi = ml^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

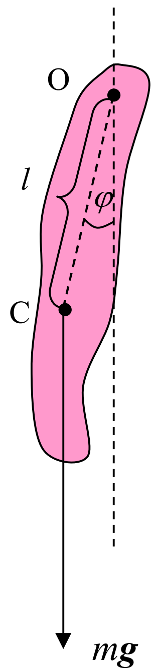
Jei kampas φ nedidelis, tai $\sin\varphi \approx \varphi$.

Pertvarkę gauname

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\varphi = 0}$$

Čia $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ arba $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

3. Fizikinė svyruoklė



Tai absoliučiai kietas kūnas, svyruojantis veikiamas sunkio jėgos apie ašį O, neinančia per to kūno masės centrą C.
Tegul ašies atžvilgiu kūno inrcijos momentas *I*.
Užrašome pagrindinę sukamojo judėjimo lygtį šiam atvejui:

$$M = I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-mgl\sin\varphi = I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t_2}$$

Nedideliems kampams galime vėlgi pasinaudoti išraiška $\sin\varphi \approx \varphi$.
Tada pertvarkę gauname analogišką lygtį

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\varphi = 0}$$

Šiuo atveju $\omega = \sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$. Dydis *mgl* vadinamas kreipimo momentu. Iš tikrųjų, nedideliems kampams jėgos momentas, grąžinantis sistemą į pusiausvyros padėtį, lygus

$$M = mgl\varphi.$$

Taigi, kai $\varphi = 1 rad$, jėgos momentas lygus kreipimo momentui.

Matome, kad visais atvejais turime matematiškai identiškos formos lygtį

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$$

Jos sprendinys gali būti $x = \sin\omega t$ arba $x = \cos\omega t$. Tuo nesunku įsitikinti, įstačius *x* išraišką į lygtį. Vadinasi, turime harmoninių svyravimų lygtį – dydis *x* knta periodiškai pagal sinuso (kosinuso) dėsnį su svyravimų periodu

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Kūno ant spyruoklės atveju $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Matematinės svyruoklės atveju $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Fizikinės svyruoklės atveju $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$.

Bendru atveju $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\alpha_s}}$. Čia α_s - vadinamasis kreipimo momentas . Tai dydis, skaitine verte jėgos momentui, grąžinančiam sistemą į pusiausvyros padėtį, kai atlenkimo kampas lygus 1 vienetui (radianui).

Svyravimai esant trinčiai

Nagrinėjome idealizuotą sistemą, neturinčią energijos nuostolių. Realiomis sąlygomis visuomet yra trintis, pasipriešinimas judėjimui, todėl sistemos energija prarandama. Jei šie energijos nuostoliai nepapildomi, svyravimai galiausiai anksčiau ar vėliau užges. Dažnai praktikoje pasitaiko atvejis, kuomet trinties (pasipriešinimo) jėga proporcinga greičiui (prisiminkime Stokso dėsnį). Taigi,

$$F_x^* = -rv = -r\dot{x} \ . \qquad (2\text{-}9)$$

Čia r – konstanta, vadinama pasipriešinimo koeficientu. „-„ ženklas reiškia, kad visuomet greičio ir pasipriešinimo jėgų kryptys priešingos. Taigi, 2-asis Niutono dėsnis tokiai sistemai atrodo taip:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \ . \qquad (2\text{-}10)$$

Patogumo dėlei panaudokime tokius pažymėjimus:

$$2\gamma = \frac{r}{m}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \ . \qquad (2\text{-}11)$$

Tuomet lygtis (2-10) virsta

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ . \qquad (2\text{-}12)$$

Ši lygtis matematiškai aprašo gęstančiuosius svyravimus. Bendrasis (2-12) sprendinys

$$x = a_0 \exp(-\gamma t)\sin(\omega t + \alpha) \text{ arba} \qquad (2\text{-}13)$$

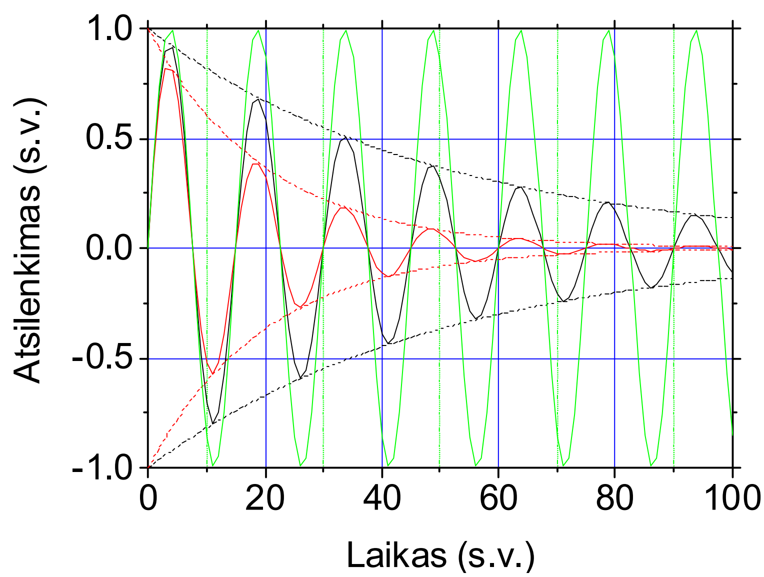
$$x = a_0 e.xp(-\gamma t)\sin\left[\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^{1/2} t + \alpha\right] \qquad (2\text{-}13a)$$

Čia a_0 ir α - laisvos konstantos. Tai galima patikrinti.

Atkreipiame dėmesį, kad gęstančiųjų svyravimų dažnis ω bendru atveju skiriasi nuo laisvųjų (savųjų) svyravimų dažnio ω_0. Tiesa, esant nedideliam slopimui skirtumas nedidelis. Parodoma, kad

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 . \qquad (2\text{-}14)$$

Taigi, kai $\gamma << \omega_0^2$, $\omega \approx \omega_0$.



Paveiksle parodyta, kaip atrodo (2-13) atsilenkimų x priklausomybė nuo laiko, kai skirtingas slopimas. Raudonos kreivės atitinka didesnį slopimą, t.y. didesnę r vertę, taigi ir γ vertę, lyginant su juodąja kreive. Neslopstantys svyravimai pavaizduoti žalia sinusoide, kuriai $r = \gamma = 0$.

Bangos

Visos bangos perduoda energiją, nepernešdamos terpės (medžiagos). Skirtingai nuo mechaninių ar kitų svyravimų, kurie lokalizuoti edvėje ir energija iš viso nėra pernešama, bangos plinta erdvėje ir perneša energiją. Bangos kaip ir svyravimai – tam tikras periodinis procesas. Bangų atveju galima stebėti periodiškumą tiek laiko, tiek erdvės požiūriu. Svyravimų atveju kintamasis buvo tik laikas.
Bangos yra sklindančios arba bėgančios, nes energija keliauja iš šaltinio į aplinkos taškus. Atskirą atvejį sudaro vadinamoji stovinčioji banga, kuri sklinda dirbtinai apribojus erdvę, kurioje gali plisti banga.
Bangos būna dviejų rūšių: mechaninės bangos ir elektromagnetinės bangos. Jos turi daug bendrų bruožų, bet turi ir skirtumų.
Mechaninių bangų atveju bangos sklidimui būtina tamprioji terpė (harmoninėms bangoms turi galioti Huko dėsnis plačiąja prasme). Visais atvejais bangavimas yra pasikartojantis judėjimas arba svyravimas, kurio metu atsikartoja vienodi ekstremumai (kraštinės padėtys).
Skersinės bangos – tai bangos, kuriose dalelės (laukai) svyruoja stamenai energijos (bangų) sklidimo krypčiai, pvz., vandens paviršiaus bangos (vandens dalelių svyravimas) ir visos elektromagnetinės bangos (laukų virpesiai). Mes šiame kurse susikoncentruosime ties mechaninėmis bangomis.
Išilginės bangos – tai bangos, kuriose dalelės svyruoja išilgai sklidimo krypties. Elektromagnetinių išilginių bangų nebūna. Skersinės bangos gali susiformuoti, pvz., žemės drebėjimo atveju. Jos pasižymi didele griaunamąja jėga. Garso bangos – tai išilginės bangos.
Formali bangos lygtis nukrypimui nuo pusiausvyros padėties y (tai gali būti, pvz., vandens dalelių nukrypimas nuo pusiausvyros padėties sklindant bangai vandens paviršiumi, slėgio pokytis duotame taške sklindant garso bangai ore, elektrinio stiprio vertė sklindant elektromagnetinei bangai, pvz., šviesai, ir kt):

$$y = A\sin(\omega t - kx)\,. \tag{2-15}$$

Čia A – amplitudė, ω - ciklinis bangos dažnis, k –banginis vektorius $\left(k = \dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$, x – koordinatė.

Stovinčiosios bangos

Stovinčiąja banga vadinama banga, atsirandanti užsiklojant (interferuojant) dviem bėgančioms vienai prieš kitą sinusinėm bangom, kurių dažnis ir amplitudės vienodos, o skersinių bangų atveju – ir vienodos poliarizacijos. Tai koherentinės bangos.
Stovinčioji skersinė banga gali atsirasti, pvz., įtemptame tampriame siūle (stygoje), kurio vienas galas įtvirtintas, o kitas periodiškai svyruoja. Galima aprašyti matematiškai, pvz., interferuojant dviem plokščiosioms bangoms:

$$s_1 = A\sin(\omega t - kx)\,,\ s_2 = A\sin(\omega t + kx + \alpha)\,. \tag{2-16}$$

Interferencijos rezultatas – plokščioji sinusinė banga, kuri aprašoma kaip

$$s = s_1 + s_2 = 2A\cos(kx + \alpha/2)\sin(\omega t + \alpha/2)\,. \qquad (2\text{-}17)$$

Čia pasinaudota trigonometrijos ryšiu

$$\sin\gamma + \sin\beta = 2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\,.$$

Stovinčiosios bangos amplitudė A_{st}, skirtingai nuo bėgančiosios bangos amplitudės A, yra periodinė x funkcija ir laikui bėgant taške x nekinta:

$$A_{st} = 2A\left|\cos(kx + \alpha/2\right| \,. \qquad (2\text{-}18)$$

Taškai, kuriuose visuomet $A_{st} = 0$, vadinami stovinčiosios bangos mazgais, o tašakai, kuriuose amplitudė maksimali (visuomet $A_{st} = 2A$), vadinami stovinčiosios bangos pūpsniais.

Mazgų ir pūpsnių vietą galima rasti iš sąlygų:

$$kx + \alpha/2 = (2m+1)\pi/2 \text{ (mazgams)} \qquad (2\text{-}19)$$

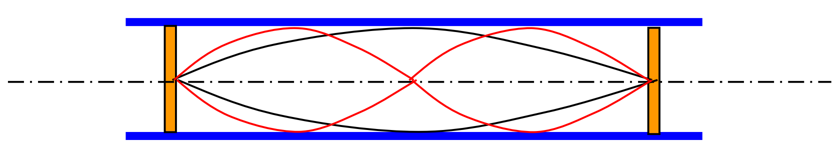
$$kz + \alpha/2 = m\pi \text{ (pūpsniams)} \qquad (2\text{-}20)$$

Čia $m = 0,1,2,...$ Atstumas tarp dviejų gretimų mazgų ar pūpsnių lygus pusei bangos ilgio.

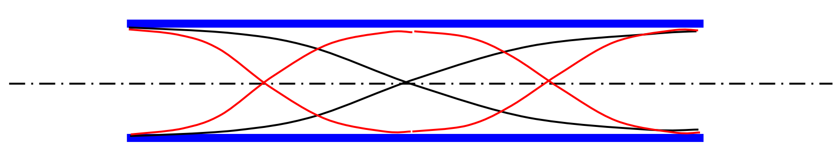
Kundto vamzdis

Tai vamzdis, kuriame formuojasi stovinčiosios bangos terpėje, kuria užpildytas šis vamzdis. Galimi trys atvejai:

1. Vamzdis uždarytas iš abiejų pusių. Tai analogas strypui, kuris įtvirtintas galuose.



2. Abu galai atviri. Tai analogas strypui, kai galai neįtvirtinti.



1-u ir 2-u atvejais vamzdžio (strypo) ilgiui l

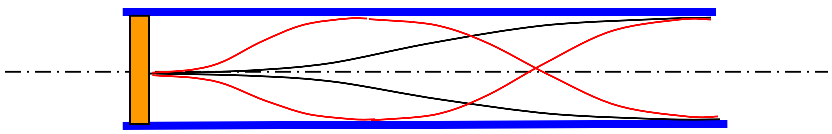
$$l = \frac{m\lambda}{2}\,,\ m = 1,2,3,... \qquad (2\text{-}21)$$

Savieji svyravimų dažniai

$$f = \frac{mc}{2l}\,. \qquad (2\text{-}22)$$

Čia c – garso greitis atitinkamoje terpėje.

3. Vienas galas atviras, kitas – uždarytas. Tai analogas strypui, kurio vienas galas laisvas, o kitas įtvirtintas.



Vamzdžio (strypo) ilgis tuomet

$$l = (2m-1)\frac{\lambda}{4}. \quad (2\text{-}23)$$

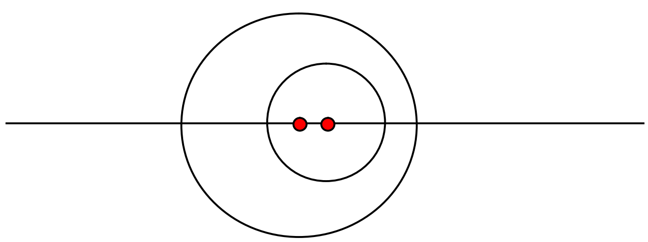
Svyravimų saviesiems dažniams (stovinčiosioms bangoms)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = (2m-1)\frac{c}{4l} \;. \quad (2\text{-}24)$$

Doplerio reiškinys

Tegul šaltinis ir imtuvas juda tiese bendru atveju vienas kito atžvilgiu atitinkamai greičiais $v_{š}$ ir v_i.

1. Tegul juda šaltinis, o imtuvas stovi ($v_i = 0$).



$$\lambda_i = \lambda_0 - v_{š} T \,. \quad (2\text{-}25)$$

Bet apskritai $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$, taigi $\lambda = \frac{c}{f}$. (2-26)

Tada

$$\frac{c}{f_i} = \frac{c}{f_0} - \frac{v_{š}}{f_0}, \text{ iš čia}$$

$$f_i = f_0 \frac{c}{c - v_{š}} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v_{š}}{c}}. \quad (2\text{-}27)$$

2. Tegul juda tik imtuvas ($v_š = 0$).

Tuomet λ nesikeičia, t.y. $\lambda = \lambda_0$, bet pakinta reliatyvus imtuvo ir šaltinio greitis, kuris tampa ($c + v_i$). λ_0 imtuvas įveikia greičiau, t.y. greičiu $(c + v_i)$.
Tada

$f_i = \dfrac{c + v_i}{\lambda_0}$. Iš čia $f_i = (c + v_i)\dfrac{f_0}{c}$. Taigi

$$f_i = f_0 \frac{c + v_i}{c}. \tag{2-28}$$

Apibendrinus, kai šaltinis ir imtuvas juda vienas į kitą,

$$f_i = f_0 \frac{c + v_i}{c - v_š}. \tag{2-29}$$

Bendru atveju, kai šaltinis ir imtuvas gali ne tik artėti, bet ir tolti (artėjimas atitinka viršutinį ženklą, tolimas – apatinį):

$$f_i = f_0 \frac{c \pm v_i}{c \mp v_š} \;. \tag{2-30}$$